fsc

PERSONA E SAPERE

Elementi per un progetto educativo

quaderno n. 1 della Fondazione Sacro Cuore

LA GEOMETRIA - VALORI CONOSCITIVI E FORMATIVI

di Carlo Felice Manara

1. Sulla definizione di geometria

Sono state proposte molte definizioni della geometria: c'è stato chi l'ha definita "scienza dello spazio" oppure anche "scienza della estensione" o in altro modo. Noi preferiamo non dare delle definizioni all'inizio di un discorso: ci basterà quindi partire dalla nozione — un po' vaga — che ci viene data dal linguaggio comune o dalle esperienze della scuola. Tutt'al più potremmo ricordare l'episodio della vita di B. Pascal, che viene raccontato dalla sorella, Mme Périer; racconta dunque la sorella che il giovanissimo genio continuava ad assillare il padre (Etienne Pascal, egli stesso discreto cultore di matematica) perchè gli lasciasse studiare la matematica, ed in particolare gli lasciasse studiare le opere di Euclide. Il padre invece voleva che egli studiasse prima le lingue, ed in particolare il latino, perchè sapeva che lo studio della matematica avrebbe assorbito tutte le forze intellettuali e gli interessi del giovane. Quindi il padre, dietro le insistenze del figlio, si limitò a dirgli che "....la geometria insegna a fare le figure giuste ed a trovare le proporzioni che le figure hanno tra loro" (...mon père lui dit en général que c'était le moyen de faire les figures justes, et de trouver les proportions qu'elles ont entre elles...). Si sa che, sulla scorta di queste sole generiche parole, il giovane Biagio Pascal costruì da solo un sistema di proposizioni, e fu sorpreso dal padre mentre dimostrava la XXXII proposizione del primo libro degli Elementi di Euclide.
Vorremmo ricordare anche l'atteggiamento assunto da B. Finzi e da lui esposto nella prefazione del suo trattato di Meccanica razionale: dice Finzi che una volta si usava definire la Meccanica razionale all'inizio dei trattati; che tuttavia egli preferisce invitare il lettore a leggere il libro, dicendo che ciò che egli vi troverà è Meccanica razionale, ma che questa scienza si estende anche molto più in là. É questo del resto anche l'atteggiamento assunto da Hegel, il quale sostiene che il vero significato dei termini che vengono impiegati in una teoria è compreso appieno soltanto quando la teoria è completamente conosciuta.
Pertanto, allo scopo di esporre le nostre idee sul significato conoscitivo e formativo della geometria, ci limiteremo — ripetiamo — in partenza alla nozione abbastanza vaga che di questa scienza viene data dalla scuola, e viene richiamata dalle espressioni del linguaggio comune.

2. Origine dei concetti della geometria

Sulla origine dei concetti della geometria vi sono varie posizioni, e non possiamo qui passarle tutte in rassegna; ma non intendiamo neppure accantonare la questione, che riteniamo importante. Da un certo punto di vista, vorremmo dire che ci interessano qui di più le posizioni che vengono assunte inconsciamente rispetto a quelle che sono esposte in forma sistematica e quindi sono state passate al vaglio della elaborazione e della riflessione.
Per analizzare, almeno sommariamente, la posizione classica, si può incominciare considerando l'impostazione di Euclide, cioè fissando l'attenzione sulla prima sistemazione teorica della geometria; o meglio il primo trattato scientifico che la storia dell'uomo registri.
In questa trattazione si incomincia con certe proposizioni che precisano il significato dei termini del discorso; proposizioni che da alcuni sono state considerate come delle definizioni,

nel senso classico della parola, ma che tali non sono. Altre proposizioni presentano quelle che Euclide chiama "nozioni comuni" ed infine altre presentano "postulati" ovvero richieste di assenso.
Queste ultime parlano delle cose che sono state nominate prima; possiamo quindi pensare che esse ci diano la chiave per capire il significato dei concetti che sono espressi dai termini impiegati.
Pensiamo che le critiche, avanzate fino dall'epoca classica, sul postulato che viene detto "delle parallele" ci aprano la strada per comprendere la posizione classica: infatti tale postulato venne criticato come "poco evidente" e si tentò di sostituire ad esso delle altre proposizioni, che venivano considerate o giudicate come "più evidenti". Non ci interessa qui analizzare tali proposizioni; ci interessa osservare che il criterio della "evidenza" che veniva invocato ci dice che le proposizioni iniziali della geometria venivano considerate come delle affermazioni su "qualche cosa", come delle proposizioni vere in forza del loro contenuto, e quindi accettate dalla mente umana con la sola ispezione della situazione esterna, senza bisogno di ragionamenti. In altre parole, la posizione classica dava adito a pensare che ci si immaginasse l'esistenza di un "oggetto" della geometria, oggetto che aveva certe proprietà che gli competevano e che dovevano essere indagate: le proprietà che erano considerate come primitive ed immediate erano enunciate senza dimostrazione; le altre, non così evidenti come le prime, erano dimostrate rigorosamente. In particolare, il rigore e la coerenza delle argomentazioni e delle dimostrazioni, la trasparenza degli oggetti della geometria e la immediatezza delle esperienze da cui questi hanno origine, fanno di questa scienza una specie di paradigma della conoscenza chiara e certa: chiara nei suoi punti di partenza, certa nelle conclusioni.

Questo atteggiamento è stato tenuto per circa una ventina di secoli, e precisamente quasi fino al secolo XIX. In questa epoca la geometria ha vissuto una certa crisi, che ha fatto cadere le concezioni precedenti, forse un poco ingenue, ed ha condotto ad una concezione più matura della origine e dei concetti fondamentali di questa scienza.
Potremmo descrivere la crisi della geometria del secolo XIX dicendo che essa fu la crisi delle pretese "evidenze intuitive", delle certezze che discendono dalla sola ispezione della situazione esterna, o addirittura dalla sola ispezione dei termini delle proposizioni che si enunciano.
In particolare, la conferma della coerenza logica delle geometrie non-euclidee ha condotto alla convinzione che non esista un "oggetto" della geometria, che abbia lo stesso "status" di realtà degli oggetti materiali studiati dalle altre scienze. Invero se esistesse un oggetto cosiffatto esso dovrebbe essere coerente in sè e quindi non potrebbe ammettere delle teorie contradditorie tra loro, come la geometria euclidea e le non-euclidee. Occorre quindi guardare in maniera diversa alla origine ed al significato dei concetti della geometria, ed indagare con atteggiamento diverso sul tipo di "realtà „ che si deve attribuire agli oggetti di questa scienza.
Noi tocchiamo qui questi argomenti non per amore di una discussione accademica ed astratta, ma perchè pensiamo che la nostra analisi può permetterci anche di indagare sul significato conoscitivo della geometria, e sulla azione formativa che lo studio di questa scienza può esercitare sui giovani.
Ci pare di poter dire che le idee della geometria si formano nella mente a partire da certe esperienze che riguardano gli oggetti fuori di noi, dalla osservazione di determinati fenomeni

di trasporto di energia (raggi di luce) e soprattutto dalla manipolazione di oggetti che vengono considerati come "rigidi" e chiamati così; oggetti cioè di tale natura che le nostre manipolazioni non provocano in essi dei sensibili cambiamenti di forma e di dimensioni. A queste esperienze di manipolazione degli oggetti vanno aggiunte le osservazioni che riguardano le mutue posizioni degli oggetti stessi.

La costruzione dei concetti della scienza che si occuperà di queste osservazioni e di queste esperienze avviene con un procedimento mentale che si sviluppa per operazioni di astrazione e di idealizzazione. Possiamo descrivere la astrazione come una operazione che conduce la nostra mente a concentrare la sua attenzione solo su alcune proprietà degli oggetti osservati ed eventualmente manipolati, e a trascurare altre proprietà, che potranno essere oggetto della attenzione di altre scienze. Nel caso della geometria, per esempio, viene trascurato il peso, il colore, la costituzione chimica di un oggetto.

Inoltre su questi oggetti, già elaborati dalla astrazione, la fantasia compie un altro lavoro costruendo degli enti nei quali la idealizzazione è spinta al massimo, e raggiunge un livello tale che l'oggetto idealizzato non corrisponde più ad alcun oggetto materiale esistente: tale è per esempio la operazione della fantasia che conduce alla costruzione dell'immagine del punto, della linea (in particolare del segmento) della superficie ecc.

Questi oggetti, elaborati dalla fantasia, vengono infine concettualizzati: ad ognuno di essi viene dato un nome, ed al loro complesso viene attribuito un insieme di proprietà che sono formulate ed espresse con strumenti linguistici: parole del linguaggio comune, simboli della matematica, simboli della logica. A questo livello questi concetti possono essere oggetto di deduzione e di ulteriore elaborazione, mediante le leggi della logica verbale abituale, oppure mediante le leggi del calcolo, algebrico o infinitesimale, oppure mediante le leggi di trasformazione e di sintassi dei simboli della logica formale, astratta e simbolica.

Ovviamente la teoria che così si ottiene dipende essenzialmente dalla natura degli oggetti concettuali, non da quella degli oggetti materiali sui quali è stata eseguita tutta la serie di operazioni mentali di cui abbiamo detto. I postulati, cioè le proposizioni iniziali dalle quali si parte per la costruzione della teoria, forniscono la definizione implicita (che alcuni Autori hanno anche chiamato "definizione d'uso") dei concetti che si trattano.

3. La geometria come sistema conoscitivo

Alcune espressioni che abbiamo usato in precedenza possono far pensare che la geometria sia un sistema concettuale del tutto arbitrario e fantastico, e quindi privo di utilità e di valore conoscitivo nei riguardi della realtà. Non abbiamo inteso dire questo, anzi la nostra opinione è del tutto contraria.

Pensiamo, per esempio, al concetto di "continuo" che è stato fondamentale per la costruzione del calcolo infinitesimale e per le sue applicazioni alla meccanica, alla fisica ed alla tecnica. Non si può negare che questo concetto derivi da un'elaborazione fantastica delle nostre esperienze, perchè soltanto la limitazione dei nostri sensi (tatto e vista) ci può fare sentire il liscio ed il continuo dove invece in realtà ci sono discontinuità e rugosità. Ma la fantasia completa le nostre sensazioni, colma le lacune dei nostri sensi e ci conduce ad un'immagine del continuo geometrico. Questa immagine fantastica non è ancora il concetto del continuo; esso viene precisato da opportuni enunciati che constano di simboli linguistici, cioè parole o numeri o altri enti della matematica, e quindi riguardano concetti e non puramente immagini. Il medesimo insieme di sensazioni elementari e di elaborazioni fantastiche può dare origine a diverse elaborazioni concettuali: per esempio a quella di Dedekind e Cantor oppure a quella, molto più sofisticata, di G. Veronese, che costruì la teoria del continuo non archimedeo.

Abbiamo quindi una situazione del tutto analoga a quella che si incontra quando si osserva che il medesimo insieme di esperienze materiali, nella regione limitata dello spazio a noi accessibile, può essere concettualizzato con la geometria classica euclidea oppure con la non-euclidea.

Non si può negare che la costruzione dell'immagine del continuo geometrico e fisico, e la sua elaborazione concettuale, con i mezzi del linguaggio comune e poi con algoritmi matematici abbia un valore conoscitivo; ma insieme occorre anche ammettere che tale valore non sia assoluto, ma sia limitato all'ordine di approssimazione dei nostri sensi, o delle nostre esperienze e delle nostre misure.

In questo ordine di idee, vorremmo dire che il valore conoscitivo della geometria è analogo a quello di una teoria fisico-matematica della realtà. Pensiamo che questo nostro punto di vista possa essere adottato anche nei riguardi della geometria dei Greci: questa infatti può essere considerata come il primo capitolo della loro fisica, cioè della costruzione razionale di una immagine della realtà esteriore; immagine valida, ma limitata nella sua portata dalla circostanza che l'attenzione dei ricercatori era concentrata su determinati aspetti della realtà materiale. Pertanto, anche in questo ordine di idee, il trattato degli Elementi di Euclide ci si presenta — ripetiamo— come il paradigma di trattato scientifico, mirabile per la struttura e per il rigore metodologico. E vorremmo anche osservare che quasi 20 secoli dopo, un'altra opera fondamentale nella storia della scienza, i "Principia" di Newton, mostra una analoga struttura: presentazione delle proposizioni che vengono considerate come evidenti, e quindi date senza dimostrazione e considerate come "principi" del ragionamento, deduzione rigorosa di tutte le altre, per mezzo della logica o del calcolo.

Abbiamo detto che la natura logica dei postulati è quella di ipotesi, di richieste che si fanno all'interlocutore per vedere se si è d'accordo con lui e poter proseguire con le dimostrazioni; tuttavia — ripetiamo — i contenuti di queste proposizioni furono considerati come delle "proprietà evidenti" di certi enti, di certe "cose" che di volta in volta erano presentate come "spazio geometrico", oppure "spazio astratto", oppure "spazio assoluto", oppure "estensione" ecc.

Si potrebbe chiamare convenzionalmente "obiettivo" o "realistico" questo punto di vista; abbiamo detto che esso fu adottato per secoli e fu abbandonato soltanto dopo una crisi, che ebbe il suo svolgimento in linea di massima durante il secolo XIX, benché fosse maturata durante i secoli precedenti. Questa crisi condusse ad una visione diversa della geometria e anche della descrizione fisico-matematica del mondo.

Si giunse così alla concezione moderna, che accetta il valore conoscitivo delle teorie fisico-matematiche, ma non pretende di attribuire ad esso un valore assoluto; così per esempio, nel caso della geometria, accetta che diverse geometrie, in particolare la euclidea classica o qualcuna delle non-euclidee, possano descrivere ugualmente bene certe situazioni del mondo reale,

entro determinati limiti di approssimazione; così come per descrivere una regione abbastanza limitata attorno ad un punto della superficie terrestre noi adottiamo una carta topografica, ben sapendo che questa non sarà mai perfetta perchè con un piano non si potrà mai "rivestire" una regione della sfera.
Ma non si potrà negare che la carta topografica possa dare delle informazioni valide, tanto sul piano della conoscenza teorica che su quello della pratica.

4. Valore formativo della geometria nella educazione alla razionalità

Abbiamo visto che la geometria può essere considerata come il primo capitolo della conoscenza razionale del mondo che ci circonda e quindi possiede un valore conoscitivo indubitabile. Vorremmo ora considerare il valore formativo che il suo studio può possedere. Possiamo analizzare questo valore formativo ripercorrendo passo passo la costruzione dei concetti della geometria e la costruzione delle sue teorie.
Abbiamo visto che il primo momento della costruzione di una teoria geometrica si realizza nella elaborazione degli oggetti di questa, attraverso il procedimento dell'astrazione. In questo momento, il discente può essere educato alla osservazione degli oggetti, ma anche e soprattutto alla loro descrizione precisa, ed alla ricerca di un primo livello di obiettività scientifica. Possiamo infatti osservare che il bambino, quando incomincia a guardare il mondo che lo circonda, e ne dà una prima descrizione, si serve di concetti che sono essenzialmente soggettivi; e tali sono anche i termini che egli adopera.
Egli infatti impara a parlare di "avanti" e "dietro", di "destra" e "sinistra" di "alto" e "basso"; tutte queste designazioni non sono illegittime, ma — ripetiamo — sono ovviamente soggettive. Un primo momento della formazione razionale del giovane dovrebbe quindi consistere nella educazione a staccarsi dalla propria visione personale dell'ambiente, per portarsi a rappresentare le cose in modo che la descrizione abbia un significato anche per gli altri, e quindi, tenda ad assumere quella obbiettività che sarà il primo passo verso una conoscenza razionale, valida universalmente.
Questo insieme di atteggiamenti da acquisire potrebbe sembrare a qualcuno molto banale, ma a nostro parere costituisce un primo e necessario passo per avviare il giovane alla mentalità scientifica.
Abbiamo visto che la prima operazione di astrazione ci fa trascurare moltissime proprietà delle cose: la costituzione chimica, il colore ecc.; ma, per costruire la geometria, la astrazione ci fa prescindere anche dalla posizione degli oggetti e dalla loro grandezza. Ma quando, per esempio, noi prendiamo in mano un oggetto, lo avviciniamo a noi per esaminarlo e misurarlo, compiamo una serie di azioni che ci sono abituali ma il cui significato ed il cui fondamento non sono per nulla banali.
Infatti una breve riflessione su questi nostri comportamenti ci condurrebbe all'impostazione dei fondamenti della geometria che fu esposta da F. Klein nella sua celebre dissertazione che viene abitualmente richiamata parlando di "Programma di Erlangen". Invero, quando prendiamo in mano un oggetto per osservarlo da vicino, inconsciamente accettiamo che esso non cambi, non muti forma e dimensioni sotto le nostre manipolazioni. Inconsciamente quindi

accettiamo che l'oggetto sia rigido, ed accettiamo che le proprietà che ci interessano in quel momento siano le proprietà invarianti di fronte ad un certo gruppo di trasformazioni, che è appunto il gruppo dei movimenti rigidi. Stiamo così toccando gli assunti fondamentali della geometria classica (euclidea); e queste osservazioni ci possono offrire il destro per capire che questa non è necessariamente l'unica geometria possibile, ma che invece ogni geometria, cioè ogni sistemazione razionale dei nostri rapporti con gli oggetti che ci circondano è fondata su certe trasformazioni che noi assumiamo in certo modo "naturali", ma che non sono imposte dalla realtà. Esse sono semplicemente accettate per abitudine culturale, ma potrebbero benissimo essere ampliate, cambiate ecc., ottenendo così dei risultati forse sconcertanti per qualcuno, ma sempre validi e legittimi, nella misura in cui i punti di partenza vengano precisati attraverso opportuni espliciti sistemi di postulati, e nella misura in cui le deduzioni vengano fatte in modo rigoroso e coerente.

Rimanendo nel campo della geometria euclidea classica, osserviamo che questa educazione a prendere coscienza in modo esplicito delle ipotesi implicite che fondano la nostra astrazione e quindi la nostra costruzione concettuale, può e deve essere completata con l'educazione all'impiego di un linguaggio tecnico preciso; educazione questa che è molto utile per la formazione alla abitudine delle idee chiare e delle espressioni precise ed univoche. Ed occorre aggiungere che questa abitudine e questa formazione non sono possedute da molti: infatti nell'uso quotidiano della lingua comune incontriamo ad ogni passo la confusione, per esempio, tra "verticale" "perpendicolare", oppure tra "orizzontale" e"parallela" e così via. Per fare un altro esempio, quando leggiamo nel rapporto sulla loggia P2 steso dall on. sen. Tina Anselmi che questa loggia ha la struttura di una "piramide rovesciata" dobbiamo concludere che la autorevole senatrice ha una visione delle figure geometriche che è rimasta ancora allo stadio infantile; e ciò per non parlare della celebre frase sulla "convergenza delle parallele", la cui fortuna politica, anni fa, fu direttamente proporzionale alla sua mancanza di senso.

Infine, dalle osservazioni, dalle descrizioni precise, dagli enunciati chiari sulle cose che ci appaiono évidenti, la geometria passa alla deduzione rigorosa delle proprietà che non ci appaiono come evidenti, ma che pure sono valide e vere, e che poi accettiamo in forza della deduzione rigorosa.

Vale la pena di osservare che è questo il momento fondamentale della conoscenza umana, momento in cui la conoscenza viene conseguita in forza di un'operazione strettamente intellettuale come la deduzione.

A questo proposito vorremmo ricordare la polemica che oppose Proclo (filosofo e storico della scienza del V secolo d.C.) agli Epicurei; costoro deridevano i geometri e le loro dimostrazioni dicendo per esempio che anche il somaro, per andare ad un mucchio di fieno, sa scegliere il cammino più corto e non ha bisogno di nessuno che gli dimostri questa proprietà. Ma Proclo ribatteva giustamente che proprio in questo sta la differenza tra la conoscenza del somaro e quella dell'uomo: questi non si limita a sapere una cosa, ma sa dimostrare che la sua conoscenza è vera, che le cose non soltanto stanno in un certo modo, ma che non possono essere altrimenti, date le premesse. E noi vorremmo aggiungere che proprio in questo sottolineare la necessità della dimostrazione si esplica uno dei più importanti valori formativi della geometria; valori che non vanno dimenticati, in un'epoca nella quale pare che si debba ridurre l'educazione ad insegnare la tecnica per interrogare delle macchine magiche, accettando senza discussione il loro responso.

É da osservarsi ancora che la deduzione geometrica, oltre ad essere un allenamento unico per la mente dei discenti, non richiede in linea di principio altre conoscenze di matematica. Quindi tale deduzione può essere conseguita anche con la logica verbale classica, come è sempre avvenuto nei secoli passati. Ne consegue che il valore formativo della geometria può essere realizzato anche a vantaggio di coloro — e forse sono tanti — che si trovano a disagio nel simbolismo astratto e convenzionale dell'algebra. Infine l'eventuale introduzione dei metodi della geometria analitica nel programma di insegnamento può offrire il destro per approfondire il significato della matematica, intesa come linguaggio per descrivere e conoscere il mondo esterno. É possibile infatti presentare la geometria analitica come il primo esempio di descrizione matematica della realtà, e quindi come il primo passo per la conoscenza fisico-matematica del mondo; conoscenza che costituisce una delle glorie della scienza, modernamente intesa, dall'epoca di Galileo in poi.

Pare dunque che l'insegnamento della geometria possa avere un valore formativo di grandissima importanza, valore che si può manifestare in ogni livello di scuola, beninteso se l'insegnante ha cura di metterlo in risalto e di proporzionare la propria azione allo sviluppo mentale degli alunni.